Elipsoid rychlostí

(1)

souřadnice: $(R, \vartheta, z, \dot{R}, \dot{\vartheta}, \dot{z})$, $\dot{\vartheta} = \omega = \frac{\theta}{R}$

předpoklady: $\Phi \neq \Phi(t)$, $\Phi \neq \Phi(\vartheta)$, $\Phi(R, z) = \Phi(R, -z)$

$$\Phi(R, z) = \Phi_1(R) + \Phi_2(z)$$

pohybové integrály: $E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) + \Phi(R, z)$; $h = R^2\dot{\vartheta}$

pohybové rovnice: $\ddot{R} = R\dot{\vartheta}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R}$; $\frac{d}{dt}(R^2\dot{\vartheta}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \emptyset$; $\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$

perturbované rovnice: $R = R_0 + R_1$ (R_0 - kruhová dráha)

$$\ddot{R}_1 = -\left[\frac{3}{R_0}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2}\right)_0\right] R_1 = -\varkappa^2 R_1$$

• vztah epicyklické frekvence a Oortových konstant:

radiální grav. síla: $F_R = \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{\theta^2}{R}$ - pro kruhovou dráhu

$$\frac{\partial F_R}{\partial R} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} = -\frac{\theta^2}{R^2} + 2\frac{\theta}{R}\frac{d\theta}{dR}$$

$$\varkappa^2 = \frac{3}{R}\frac{\theta^2}{R} - \frac{\theta^2}{R^2} + 2\frac{\theta}{R}\frac{d\theta}{dR} = 2\underbrace{\frac{\theta}{R}}_{(A-B)}\underbrace{\left(\frac{\theta}{R} + \frac{d\theta}{dR}\right)}_{-2B} = -4B(A-B)$$

hodnoty pro sluneční okolí: $\varkappa \doteq 36\ \mathrm{km\,s^{-1}\,kpc^{-1}}$, $T_{ep} = \frac{2\pi}{\varkappa} \doteq 0{,}17\ \mathrm{km^{-1}\,s\,kpc}$

$$\doteq 170\ \mathrm{Myr}$$

• řešení perturbovaných rovnic (tvar dráhy):

$$\ddot{R}_1 = -\varkappa^2 R_1 \Rightarrow R_1 = R_{10}\sin[\varkappa(t - t_0)]$$

řešení v kolmém směru získáme ze Z.Z.M.H.:

$$h = \theta R = \dot{\vartheta} R^2 = h_0$$

$$\dot{\vartheta} R^2 = (\dot{\vartheta}_0 + \dot{\vartheta}_1)(R_0 + R_1)^2 = \dot{\vartheta}_0 R_0^2$$

$$\cancel{\dot{\vartheta}_0 R_0^2} + 2\dot{\vartheta}_0 R_0 R_1 + \cancel{\dot{\vartheta}_0 R_1^2} + \dot{\vartheta}_1 R_0^2 + \cancel{2\dot{\vartheta}_1 R_0 R_1} + \cancel{\dot{\vartheta}_1 R_1^2} = \cancel{\dot{\vartheta}_0 R_0^2}$$

- jen členy 1. řádu

(2)

$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{2\dot{\vartheta}_0}{R_0} R_1 = -2\frac{\theta_0}{R_0^2} R_1$$

$$\dot{\vartheta}_1 = -2\frac{\theta_0}{R_0^2} R_{10} \sin[\varkappa(t-t_0)]$$

$$\vartheta_1 = 2\frac{\theta_0 R_{10}}{R_0^2 \varkappa}\cos[\varkappa(t-t_0)] + \cancel{\vartheta_{10}}$$ volbou ϑ_0

→ přejdeme do lokálních kartézských souřadnic

$$X = R_1, \quad Y = R_0 \vartheta_1, \quad Z = z$$

poloha hvězdy vykonávající epicyklický pohyb:

$$X = R_{10} \sin[\varkappa(t-t_0)]$$

$$Y = 2\frac{\theta_0 R_{10}}{R_0 \varkappa}\cos[\varkappa(t-t_0)]$$

⇒ drahou je elipsa s poměry poloos:

$$\frac{X_{max}}{Y_{max}} = \frac{R_{10}}{2\frac{\theta_0}{R_0\varkappa}R_{10}} = \frac{R_0\varkappa}{2\theta_0} \doteq \frac{8{,}5\cdot 36}{440} \doteq \frac{300}{440} < 1$$

→ protažená ve směru rotace galaxie

- rychlost perturbované dráhy:

$$(U, V, W) = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$$

- rozdělení rychlostí přibližně Gaussovské s disperzemi:

$(\sigma_U, \sigma_V, \sigma_W)$ – s drobnou modifikací: Asymetrický drift

- z měření σ_V lze určit velikost odchylky od kruhové dráhy

$$V = R_0\dot{\vartheta}_1 = \frac{2\theta_0}{R_0}R_{10} \approx \sigma_V \quad \Rightarrow \quad R_{10} \approx \frac{\sigma_V R_0}{2\theta_0} \doteq 20\left(\frac{\sigma_V}{\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)\mathrm{pc}$$

*
↓
(4)

- σ_V a R_{10} pro astrofyzikální objekty:

	σ_V [km s⁻¹]	R_{10} [pc]
GMC	5	100
O,B *	10	200
A *	20	400
G,M,K *	40–50	~ 1000

- tvar elipsoidu rychlostí
  - rozdělení rychlostí hvězd v daném bodě
  - vznikne kombinací rychlostí hvězd, které daným bodem prochází, jejichž dráhy odpovídají různým ~~kruhov~~ epicyklickým drahám s různými kruhovými drahami/poloměry
  - rozdělení rychlostí lze dobře aproximovat:

$$F(u,v,w) = F_0 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma_u^2} - \frac{(v-V_a)^2}{2\sigma_v^2} - \frac{w^2}{2\sigma_w^2} \right]$$

V_a - rychlost asymetrického driftu
- hvězdy systematicky zaostávají za pohybem bodu na kruhové dráze
- velikost V_a závisí na disperzi rychlostí / odchylce od kruh. dr.

$$\nearrow R_{10} \Rightarrow \nearrow \sigma_u \Rightarrow \nearrow V_a$$

- tvar elipsoidu rychlostí (poměr poloos σ_u/σ_v) lze odvodit porovnáním rychlosti kruhové dráhy v bodě $S=(X,Y)$ a perturbované rychlosti odpovídající kruhové dráze $(0,0)$ neboli R_0

$\Theta_0(S) = \Theta_0 + \left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_0 X$ - rychlost na kruhové dráze

Pro perturbovanou dráhu platí: $\Theta R = \Theta_0 R_0 \Rightarrow \Theta(R_0+R_1) = \Theta_0 R_0$

$\Rightarrow \Theta = \Theta_0 - \frac{\Theta_0}{R_0} X$

Rozdíl rychlostí v bodě S:

$$\Theta - \Theta_0(S) = -\left[\left(\frac{d\Theta}{dR}\right)_0 + \frac{\Theta_0}{R_0}\right] X = +2BX = -\frac{\varkappa^2 R_0}{2\Theta_0} X$$

Vystředováno přes mnoho hvězd:

$$\overline{\left[\Theta - \Theta_0(S)\right]^2} = 4B^2\,\overline{X^2} = 4B^2 R_{10}^2\,\overline{\sin^2[\varkappa(t-t_0)]}$$

Rozdíl radiálních rychlostí v bodě S

$$\dot{R}_0(S) = 0 \quad - \text{ kruhová dráha}$$

$$\dot{R} = \dot{X} = R_{10}\,\varkappa \cos[\varkappa(t-t_0)]$$

$$\overline{[\dot{R} - \dot{R}_0(S)]^2} = \varkappa^2 R_{10}^2\,\overline{\cos^2[\varkappa(t-t_0)]}$$

Poměr poloos elipsoidu:

$$\frac{\sigma_v^2}{\sigma_u^2} = \frac{\overline{[\theta-\theta_0(S)]^2}}{\overline{[R-R_0(S)]^2}} = \frac{\varkappa^2 R_0^2}{4\theta_0^2} = \frac{4B^2}{-4B(A-B)} = \frac{-B}{A-B} \doteq \frac{1}{2}$$

- porovnání s pozorováním:
  - $+$ O, B hvězdy: $\frac{\sigma_v}{\sigma_u} \doteq 1$
  - $+$ G, K, M hvězdy: $\frac{\sigma_v}{\sigma_u} \doteq 0{,}7$
  - A hvězdy: odchylka vertexu elipsoidu o $\sim 20°$
    - $\rightarrow$ příčka
    - $\rightarrow$ pohybové skupiny (Hyades, Sirius)

- vztah disperze rychlostí σ_v a maximální odchylky od kruhové dráhy R_{10}

$$\sigma_v^2 = \overline{[\theta-\theta_0(S)]^2} = 4B^2\,\overline{X^2} = 4B^2 R_{10}^2\,\overline{\sin^2[\varkappa(t-t_0)]} = 2B^2 R_{10}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_v = \sqrt{2}\,|B|\,R_{10}$$

NEBO: $X \approx \frac{\sigma_u}{\varkappa} \doteq 30\left(\frac{\sigma_u}{km/s}\right)$ pc